ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2007

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1:

Έστω $f: (0, +\infty) \to R$ για την οποία ισχύει

$f(x.y) = f(x) + f(y) - 1$, για κάθε $x, y > 0$. Δείξτε ότι:

i) $f(1) = 1$,

ii) $f(x) = 2 - f(\frac{1}{x})$, $x > 0$

iii) Αν η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μοναδική λύση την $x = 1$, τότε η f είναι '1- 1'.

ΘΕΜΑ 2:

Αν για το μιγαδικό z ισχύει $z^5 \cdot \bar{z} = 1$ τότε

(i) Δείξτε ότι $|z| = 1$

(ii) Να λυθεί η εξίσωση $z^5 \cdot \bar{z} = 1$

ΘΕΜΑ 3:

Έστω $f: R \to R$ με $f(R) = R$ για την οποία ισχύει $e^{2f(x)} + 2f^5(x) - x + 1 = 0$

(α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1

(β) Να βρείτε την αντίστροφη της f

ΘΕΜΑ 4:

Έστω $z \in C$, $z \neq i$ και $f(z) = \frac{z^3 + i}{z - i}$

(α) Να δείξετε ότι $f(z) = z^2 + iz - 1$

(β) Αν $f(z) \in R$ να δείξετε ότι $z \in I$ ή $2Imz = -1$

(γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(z) = \frac{z}{i}$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ 1ο ΘΕΜΑ

(i) Η σχέση $f(x \cdot y) = f(x) + f(y) - 1 \quad (1)$ ισχύει για κάθε $x, y > 0$ άρα και για $x = y = 1$, οπότε έχουμε $f(1) = f(1) + f(1) - 1 \Leftrightarrow f(1) = 1$

(ii) Για $y = 1/x$ η σχέση (1) γίνεται

$$f(x \cdot \frac{1}{x}) = f(x) + f(\frac{1}{x}) - 1 \Leftrightarrow f(1) = f(x) + f(\frac{1}{x}) - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 = f(x) + f(\frac{1}{x}) - 1 \Leftrightarrow f(x) = 2 - f(\frac{1}{x}) \quad (2)$$

(iii) Έστω $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $f(x_1) = f(x_2) \overset{(2)}{\Leftrightarrow}$

$$\Leftrightarrow f(x_1) = 2 - f(\frac{1}{x_2}) \Leftrightarrow f(x_1) + f(\frac{1}{x_2}) = 2 \Leftrightarrow f(x_1) + f(\frac{1}{x_2}) - 1 = 1$$

$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} f(x_1 \cdot \frac{1}{x_2}) = 1$ και επειδή η $f(x) = 1$ έχει μονάδικη λύση την $x = 1$

άρα $x_1 \cdot \frac{1}{x_2} = 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ άρα f '1- 1'.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ 2ο ΘΕΜΑ

(i) Είναι $z^5 \cdot \bar{z} = 1$ οπότε

$$|z^5 \cdot \bar{z}| = 1 \Leftrightarrow |z^5| \cdot |\bar{z}| = 1 \Leftrightarrow |z|^5 \cdot |z| = 1 \Leftrightarrow |z|^6 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$$

(ii) $z^5 \cdot \bar{z} = 1 \Leftrightarrow z^4 \cdot z \cdot \bar{z} = 1 \Leftrightarrow z^4 \cdot |z|^2 = 1 \Leftrightarrow z^4 \cdot 1 = 1$

$$\Leftrightarrow z^4 = 1 \Leftrightarrow z^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow (z^2 - 1) \cdot (z^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z - 1) \cdot (z + 1) \cdot (z - i) \cdot (z + i) = 0$$

άρα $z = 1$, $z = -1$, $z = i$, $z = -i$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ 3ο ΘΕΜΑ

(α) Για κάθε $x \in R$ έχουμε

$e^{2f(x)} + 2f^5(x) - x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$e^{2f(x)} + 2f^5(x) = x - 1 \quad (1)$. Έστω $x_1, x_2 \in R$ με

$f(x_1) = f(x_2)$ άρα είναι $e^{2f(x_1)} = e^{2f(x_2)}$ και $2f^5(x_1) = 2f^5(x_2)$.

Οπότε $e^{2f(x_1)} + 2f^5(x_1) = e^{2f(x_2)} + 2f^5(x_2) \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$x_1 - 1 = x_2 - 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ άρα f είναι 1-1.

(β) Για κάθε $y \in f(R)$ υπάρχει μοναδικό $x \in R$ ώστε $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ άρ α η (1) γίνεται

$e^{2y} + 2y^5 = f^{-1}(y) - 1 \Leftrightarrow f^{-1}(y) = e^{2y} + 2y^5 + 1$, $y \in R$

ή $f^{-1}(x) = e^{2x} + 2x^5 + 1$, $x \in R$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ 4ο ΘΕΜΑ

(α) Γνωρίζουμε ότι $i^3 = -i$ άρα

$$f(z) = \frac{z^3 + i}{z - i} = \frac{z^3 - (-i)}{z - i} = \frac{z^3 - i^3}{z - i} = \frac{(z - i) \cdot (z^2 + iz + i^2)}{z - i} = z^2 + iz - 1$$

(β) $f(z) \in R$ άρα

$$f(z) = \overline{f(z)} \Leftrightarrow z^2 + iz - 1 = \overline{z^2 + iz - 1} \Leftrightarrow z^2 + iz - 1 = \bar{z}^2 - i\bar{z} - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z^2 + iz = \bar{z}^2 - i\bar{z} \Leftrightarrow (z^2 - \bar{z}^2) + i(z + \bar{z}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(z - \bar{z}) \cdot (z + \bar{z}) + i(z + \bar{z}) = 0 \Leftrightarrow (z + \bar{z})(z - \bar{z} + i) = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow z + \bar{z} = 0$ ή $z - \bar{z} + i = 0$. Οπότε $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in I$ ή

$z - \bar{z} = -i \Leftrightarrow 2\,Imz \cdot i = -i \Leftrightarrow 2\,Im\,z = -1$

(γ) $f(z) = \frac{z}{i} \Leftrightarrow z^2 + iz - 1 = \frac{z}{i} \Leftrightarrow z^2 + iz - 1 = -iz \Leftrightarrow z^2 + 2iz - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z^2 + 2iz + i^2 = 0 \Leftrightarrow (z + i)^2 = 0 \Leftrightarrow z = -i$$

Παρατήρηση: Οι σχέσεις $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in R$, $z = -\bar{z} \Leftrightarrow z \in I$ καλό είναι να αποδεικνύονται

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΑΝ ΤΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Γ. ΧΑΣΙΑΚΗΣ
στον **ΠΕΙΡΑΙΑ**